الاسم:

| | | |
|---|---|---|
| وزارة التعليم العالي | الامتحان النهائي | |
| جامعة البعث | لمقرر تحليل (2)- السنة الأولى رياضيات | الدرجة 100 |
| كلية العلوم | الفصل الأول لعام 2014- 2015 | المدة ساعة ونصف |

أجب عن الأسئلة التالية :

**السؤال الأول (24درجة)** : أكتب الجواب النهائي لقيم التكاملات الآتية :

$$1-I=\int \ln|x|\,dx \quad , \quad 2-I=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$3-I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \quad ,a\neq 0$$

**السؤال الثاني (26درجة )** : أحسب قيمة التكاملات الآتية :

$$1-I=\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx \quad , \quad 2-I=\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

**السؤال الثالث (26درجة )** : (أ) أحسب التكامل المحدد الآتي بعد التأكد من وجوده :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

(ب) أوجد طول المنحني المعطى بالمعادلات الآتية :

$$x=cos^3\theta \quad , \quad y=sin^3\theta \quad , 0\leq\theta\leq 2\pi$$

**السؤال الرابع (24درجة)** : أدرس تقارب أو تباعد التكاملين المعتلين الآتيين وعين القيم في حال التقارب .

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \quad , \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$$

انتهت الأسئلة

حمص في 2015/2/1 مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرسا المقرر

د. منير مخلوف

د. نجوى الجيجكلي

د. عون الجيلالي

٤

سلم تصحيح تحليل 2
سنة أولى رياضيات

السؤال الأول:

- $I = \int \ln|x|\, dx$

نفرض أن $\ln|x| = t \rightarrow x = e^t \Leftarrow dx = e^t dt$

$I = \int \ln|x|\, dx = \int t\, e^t dt = \begin{pmatrix} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{pmatrix} = t e^t - \int e^t dt$

$= t e^t - e^t = x(\ln|x| \ldots$

- $I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$

نفرض أن $x = \sin t \Rightarrow I = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t\, dt$

$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int [\frac{1}{2} dt + \frac{\cos 2t}{2} \ldots$

$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin 2(\arcsin x) + C$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

نفرض أن $t = x + \sqrt{x^2+a} \Leftarrow$

$dt = dx + \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a}} = dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}} \Rightarrow \sqrt{x^2+a}\, dt = dx(\sqrt{x^2+a} + x)$

$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x} dt \Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{x^2+a}}{(\sqrt{x^2+a}+x)\sqrt{x^2+a}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{x^2+a}+x} = \int \frac{dt}{t}$

$= \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$

حل السؤال الثاني :

$$(-x^2-4x+5)' = -\frac{1}{2}(-2x-4)+(3-2) = x+3$$
$$(-2x-4) \qquad = -\frac{1}{2}(-2x-4)+1$$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \quad , t = 5-4x-x^2$$

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\sqrt{t} = -\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5+4-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{3}$$

$$I = -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

$$I = \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx \; , \left(\begin{matrix}\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \\ \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}\end{matrix}\right) , t = x^{\frac{1}{12}} \to t^{12} = x$$

بالتعويض بالتكامل

$$dx = 12t^{11}dt \longrightarrow I = 12\left[\frac{t^{18}}{18}+\frac{1}{14}t^{14}-\frac{1}{6}t^{6}\right]+C$$



سلم تصحيح الامتحان النهائي

جامعة البعث

كلية العلوم - قسم الرياضيات   المقرر: تحليل 2 / سنة 2 رياضيات   الدرجة: 100

الفصل الأول للعام $\frac{2014}{2015}$ (الجزء الثاني)

جواب السؤال الثالث (1) لحساب التكامل: $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$ نلاحظ أولاً

[26] ستة وعشرون درجة

أن الدالة المكاملة: $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$ مستمرة على المجال $[0,1]$

وبالتالي تكون قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان على هذا المجال، فالتكامل موجود

وبإجراء التحويل التالي: $x=\sin t$ فيكون: $dx=\cos t\,dt$

كما أنه: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ , $x=0\Rightarrow t=0$

وبالتالي التكامل المفروض:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

يصبح بالشكل:

3 $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt$$

الآن إذا فرضنا في هذا أن: $t=\frac{\pi}{2}-u$ فيكون: $dt=-du$

من أجل $t=0$ يكون: $u=\frac{\pi}{2}$

و $t=\frac{\pi}{2}$ يكون: $u=0$ وبالتعويض نحصل على:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\,du$$

وعليه فإن:

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt \Rightarrow$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

السؤال الرابع: لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل:

24 أربع وعشرون علامة

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

نلاحظ أنه توجد للدالة المكاملة نقطة شاذة: $x=1$

لذلك نكتب التكامل المفروض بالصورة:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

ولكن:

/2 $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\lim_{a\to 1^-}\left[(a-1)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2}$$

أيضاً:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b\to 1^+} \int_b^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\lim_{b\to 1^+}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_b^4\right] = \frac{3}{2}(3)^{\frac{2}{3}}$$

أي:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

فإن التكامل المفروض متقارب وقيمته تساوي:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = \frac{3}{2}\left(-1+\sqrt[3]{9}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - \right.$$

ثانياً لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$$

نلاحظ أنه من أجل: $x \geq 1$ يكون لدينا:

/2 $$x^2(1+e^{-x}) > x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}$$

ولكن:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] =$$

متقارب وبالتالي حسب اختبار المقارنة نجد أن التكامل المفروض متقارب.
ويمكن تطبيق اختبار نهاية النسبة ونحصل على نفس النتيجة.

مدرس المقرر:
د. منير مخلوف

(ب) إن المنحني المعطى هو الاسترويد ولإيجاد طول هذا المنحني نوجد طول ربع المنحني ونضرب الناتج بـ 4 حيث: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ كما أنه منحني متناظر بالنسبة للمحور والمبدأ ولما كانت الدوال $x(\theta)$ ، $y(\theta)$ مستمرة وقابلة للمفاضلة فيكون لهذا المنحني طول L يحسب بالقانون:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

وتكون لدينا:

$$x'(\theta) = 3\cos^2\theta(-\sin\theta) = -3\sin\theta\cos^2\theta$$
$$y'(\theta) = 3\sin^2\theta(\cos\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta$$

وبالتالي فإن:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

منحني الاسترويد

وتكون:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2\theta\cos^4\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos\theta\sin\theta|\, d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta . \cos\theta\, d\theta =$$

4

$$= \frac{3}{2}\left[\sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$L = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$ وحدات طول

إذاً طول المنحني المعروض هو: $L = 6$ وحدة طول.

